**МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ИМ. М.В. ЛОМОНОСОВА**

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**КАФЕДРА МАТЕМАТИКИ**

# КУРСОВАЯ РАБОТА

## Теория функций многих комплексных переменных

Выполнил студент

2 курса, 202 группы

Филиппов Сергей Александрович

Научный руководитель

Ст. преподаватель

Могилевский И.Е.

Москва 2012

# Введение

В последние годы теория функций многих комплексных переменных получила многочисленные приложения в квантовой теории поля. Это вызвано тем, что отсутствие какой-либо удовлетворительной модели в современной теории элементарных частиц, которая позволила бы объяснять и предсказывать результаты эксперимента, привело к развитию аксиоматического подхода к квантовой теории поля. При этом подходе физические величины рассматриваются как граничные значения функции $f(z)$ многих комплексных переменных, голоморфной в некоторой области $\boldsymbol{D}$, определяемой аксиомами. Но в отличие от одного комплексного переменного в пространстве многих комплексных переменных имеет место явление: не всякая область есть область голоморфности. (В ТФКП из теоремы Римана о возможности конформного отображения произвольной области на единичный круг, который также является областью аналитичности, следует, что всякая область есть область аналитичности.) Поэтому ввиду отсутствия конкретного вида функции $f$ возникает задача о построении оболочки голоморфности (множества функций голоморфных) в области $\boldsymbol{D}$. Далее можно в принципе найти выражение любой функции $f$, голоморфной в $\boldsymbol{D}$, через её значения на части границы. Если последние значения окажутся связанными с экспериментально наблюдаемыми, то полученное представление открывает путь к экспериментальной проверке теории.

В этой работе рассматривается естественное расширение понятия функций одной комплексной переменной до функций многих комплексных переменных. Анализируются общие черты, переходящие по аналогии из одномерного анализа в многомерный и, конечно же, выделяются различия, возникающие при таком обобщении.

Помимо этого можно проводить сравнительную характеристику многомерного комплексного анализа с многомерным действительным, что, собственно, также проделано в данной работе.

В виду сложности, громоздкости и требования к предварительно высокой математической подготовке, в работе разбирается лишь часть курса теории функций многих комплексных переменных, а вследствие этого не затрагивается приложение в квантовой теории поля.

# Основные множества, рассматриваемые в ТФМКП

Пространство $\boldsymbol{C^n}$ является декартовым произведением $n$ комплексных плоскостей. Таким образом, точки $n$-мерного комплексного пространства $\boldsymbol{C^n}$ – это точки $2n$-мерного вещественного пространства $\boldsymbol{R^{2n}}$. Однако введение комплексной структуры в $\boldsymbol{R^{2n}}$ сразу вводит в этом пространстве асимметрию. В $\boldsymbol{C^n}$ естественно вводится структура векторного пространства над полем $\boldsymbol{C}$; сложение и умножение определяется покоординатно.

В $C^n$ определено эрмитово скалярное произведение

$$(z, w) = \sum_{v=1}^{n} z_v \, \overline{w}_v.$$

В $C^n$ действует обычная евклидова метрика, по которой расстояние между точками z и w равно $|z - w| = \sqrt{(z - w, z - w)^2}$. Иногда рассматривают метрику, в которой под расстоянием между точками z и w понимается.

$$\|z - w\| = \max_v |z_v - w_v|.$$

Имеет место такое двойное неравенство:

$$\|z - w\| \leq |z - w| \leq \sqrt{n}\|z - w\|.$$

Оно показывает, что обе метрики вводят в $C^n$ одинаковую топологию.

## Простейшие области.

1. *Шар* радиуса с центром в точке $a \in \boldsymbol{C^n}$ определяется как множество точек

   $$\boldsymbol{B}(a, r) = \{z \in \boldsymbol{C^n}: |z - a| < r\}$$

   Это обычный евклидовый шар.

2. *Поликруг* радиуса $r = (r_1, \dots, r_n)$ с центром $a \in \boldsymbol{C^n}$ определяется как множество точек

   $$\boldsymbol{U}(a, r) = \{z \in \boldsymbol{C^n} : |z_v - a_v| < r_v, v = 1, \dots, n\}$$

3. *Поликруговые области* определяются как декартово произведение $n$ плоских областей:

   $$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D_1} \times \dots \times \boldsymbol{D_n}$$

4. *Область Рейнхарта* с центром в точке $a \in \boldsymbol{C^n}$ определяются как области, обладающие следующим свойством: вместе с каждой точкой $z_0 = \{z_0^v\}$ области принадлежит и любая точка

   $$z = \left\{a_v + (z_v^0 - a_v)e^{i\theta_v}\right\}, 0 \leq \theta_v < 2\pi.$$

5. *Область Хартогса* с плоскостью симметрии $\{z_n = a_n\}$ определяется как область, обладающая следующим свойством: вместе с каждой точкой $z_0 = \{z_0^v\}$ области принадлежит и любая точка $z = \left(z_{n1}^0, \dots, z_{n-1}^0, a_n + (z_n^0 - a_n)e^{i\theta_n}\right), 0 \leq \theta_n < 2\pi.$

Представим $z \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}^2}$ в виде квадратной матрицы $Z = (z_{jk}),\ j, k = 1, \dots, n.$ Пусть $Z^* = (\bar{z}_{kj})$ – матрица, сопряженная и транспонированная к Z; положим

$$\boldsymbol{Im}\, Z = \frac{1}{2i}(Z - Z^*)$$

Эта матрица эрмитова. Условимся писать, что эрмитова матрица больше нуля, если эта матрица положительно определена.

6. *Обобщенная верхняя полуплоскость* – это область, точки которой удовлетворяют условию:

$$\boldsymbol{H} = \left\{Z \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}^2} : \boldsymbol{Im}\, Z > 0\right\}$$

Аналогично определяется обобщенная нижняя полуплоскость.

# Голоморфные функции многих переменных

Понятие голоморфности для функции многих переменных обобщает соответствующее понятие из комплексного анализа одной переменной. Также для дифференцируемой в комплексном смысле функции выполняются аналогичные условия Коши-Римана.

Определение. Функция $l: \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}} \to \boldsymbol{C}$ называется ***R****–линейной* (соответственно ***C****-линейной*), если:

а) $l(z' + z") = l(z') + l(z")$ для всех $z', z" \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}$

б) $l(\alpha z) = \alpha l(z)$ для всех $z \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}$ и всех $\alpha \in \boldsymbol{R}$ (соотв. всех $\alpha \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}$)

Определение. Функция $f: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}$, где $\boldsymbol{U}$ − окрестность точки $z \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}$, называется $\boldsymbol{R}$ − *дифференцируемой* (соответственно ***C****-дифференцируемой*) в этой точке, если

$$f(z + h) = f(z) + l(h) + o(|h|),$$

где $l$-некоторая $\boldsymbol{R}$-линейная (соотв. $\boldsymbol{C}$-линейная) функция, а $\frac{o(|h|)}{|h|} \to 0$ при $h \to 0$.

Теорема. Для того чтобы $\boldsymbol{R}$-дифференцируемая в точке функция $f = u + iv$ была $\boldsymbol{C}$-дифференцируемой в этой точке, необходимо и достаточно выполнение условий Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x_t} = \frac{\partial v}{\partial y_t}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y_t} = -\frac{\partial v}{\partial x_t}, \qquad t = 1, \dots, n.$$

Стоит заметить, что при *n>1* эта система переопределена (содержит *2n* уравнений относительно двух неизвестных функций), и это обстоятельство принципиально отличает многомерный комплексный анализ от одномерного.

Определение. Функция $f$ называется *голоморфной* в точке, если она $\boldsymbol{C}$-дифференцируема в некоторой окрестности этой точки.

Из условий Коши-Римана вытекает, что голоморфная в окрестности некоторой точки функция голоморфна по каждому переменному при фиксированных остальных переменных.

Далее будут установлен ряд элементарных свойств голоморфных функций многих переменных, аналогичных свойствам функции одного переменного.

В дальнейшем будем по-прежнему обозначать через $\boldsymbol{U}$ множество точек $\{z \in \boldsymbol{C^n}: |z_v - a_v| < r_v,\ v = 1, .., n\}$; за множество функций голоморфных на области $\boldsymbol{U}$ за $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{U})$, а непрерывных на $\overline{\boldsymbol{U}}$ за $\mathrm{C}(\overline{\boldsymbol{U}})$.

Теорема. Любая функция $f \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{U}) \cap \mathrm{C}(\overline{\boldsymbol{U}})$ в любой точке $z \in \boldsymbol{U}$ представляется кратным интегралом Коши

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\gamma)\, d\gamma_1 \dots d\gamma_n}{(\gamma_1 - z_1) \dots (\gamma_n - z_n)} = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\gamma)\, d\gamma}{(\gamma - z)}$$

где $\boldsymbol{\Gamma}$ - остов $\boldsymbol{U}$, т.е. произведение граничных окружностей $\{|z_v - a_v| = r_v\}, v = 1, \dots, n.$

Из представления функции интегралом Коши выводится возможность разложения её в степенной ряд.

Теорема. Если $f \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{U}) \cap \mathrm{C}(\overline{\boldsymbol{U}})$, то в каждой точке $z \in \boldsymbol{U}$ она представляется кратным степенным рядом

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k\, (z - a)^k \tag{$*$}$$

с коэффициентами

$$\mathrm{c}_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\gamma)\, d\gamma}{(\gamma - z)^{k+1}}.$$

Лемма Абеля. Если члены кратного степенного ряда $\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k\, (z - a)^k$ ограничены в какой-либо точке $\lambda \in \mathrm{C}^{\boldsymbol{n}}$, то он сходится абсолютно и равномерно на любом компактном подмножестве $\boldsymbol{K}$ поликруга $\boldsymbol{U(a,\rho)}$ с центром $a$ и векторным радиусом $\rho = (\rho_1, \dots, \rho_n)$, где $\rho_v = |\lambda_v - a_v|$.

Теорема. Если $f \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{D})$, то в любой точке $z \in \boldsymbol{D}$ эта функция имеет частные производные всех порядков, также принадлежащие $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{D})$.

Теорема. Если голоморфная в точке a функция $f$ разложена в степенной ряд вида (*), то коэффициенты этого ряда определяются по формулам Тейлора:

$$c_k = \frac{1}{k_1! \dots k_n!} \frac{\partial^{k_1+\dots+k_n} f}{\partial {z_1}^{k_1} \dots \partial {z_n}^{k_n}} = \frac{1}{k!} \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k} \text{ при } z = a$$

Теорема (единственности). Если функция $f \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{D})$ в некоторой точке $a$ области обращается в нуль вместе со всеми частными производными, то $f \equiv 0$ в $\boldsymbol{D}$.

Теорема (принцип максимума модуля). Если функция $f \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{D})$ и $|f|$ достигает максимума в некоторой точке $a \in \boldsymbol{D}$, то $f \equiv const$ в $\boldsymbol{D}$.

Теорема (Лиувилль). Если функция $f$ голоморфна в $C^{\boldsymbol{n}}$ и ограничена, то она постоянна.

Теорема (Вейерштрасс). Пусть последовательность функций $f_\mu \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{D})$ сходится к функции $f$ равномерно на каждом компактном подмножестве $\boldsymbol{D}$; тогда $f \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{D})$ и для любого $k = (k_1, \dots, k_n)$

$$\frac{\partial^{|k|} f_\mu}{\partial z^k} \to \frac{\partial^{|k|} f}{\partial z^k}$$

на любом $\boldsymbol{K} \subset \boldsymbol{D}$.

Лемма (о голоморфной зависимости интегралов от параметра). Пусть $\gamma_\mu : \zeta_\mu = \zeta_\mu(t)$ – спрямляемая кривая в плоскости $\zeta_\mu$ ($\mu = 1, \dots, m$), $\gamma = \gamma_1 \times \dots \times \gamma_\mu$ и $\boldsymbol{D}$ – область в $C^{\boldsymbol{n}}$; пусть $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$ и $z = (z_1, \dots, z_n)$. Если функция $g(\zeta, z)$ непрерывна на $\gamma \times D$, голоморфна по z в $\boldsymbol{D}$ при любом $\zeta \in \gamma$ и имеет на $\gamma \times \boldsymbol{D}$ непрерывные частные производные $\frac{\partial g}{\partial z_v}$, то интеграл

$$G(z) = \int_{\gamma_1} d\zeta_1 \dots \int_{\gamma_m} g(\zeta, z) d\zeta_m = \int_{\gamma} g(\zeta, z) d\zeta$$

голоморфен в $\boldsymbol{D}$ и

$$\frac{\partial G}{\partial z_v} = \int_{\gamma} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial z_v} d\zeta, \quad v = 1, \dots, n.$$

Теорема (Хартогса). Если функция $f$ голоморфна в любой точке области $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}$ по каждому из переменных $z_v$, то она голоморфна в $\boldsymbol{D}$.

Приведем другую немаловажную формулировку теоремы Хартогса.

Будем говорить, что функция $f$ *голоморфна* в точке $a \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}$ *в смысле Римана*, если $f$ голоморфна по каждому переменному $z_v$ в некотором поликруге $\boldsymbol{U}(a, r)$.

Будем говорить, что функция $f$ *голоморфна* в точке $a \in \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{n}}$ *в смысле Вейерштрасса*, если $f$ разлагается в некотором поликруге $\boldsymbol{U}(a, r)$ в степенной ряд

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k \, (z - a)^k$$

Теорема (Хартогса)'. Понятия голоморфности в смысле Римана и в смысле Вейерштрасса эквивалентны.

Её же действительный аналог неверен: функция

$$f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}, f(0,0) = 0$$

дифференцируема по переменному $x$ при любом фиксированном $y$ и по $y$ при любом фиксированном $x$, но не является даже непрерывной в точке $(0,0) \subset \boldsymbol{R}^{\boldsymbol{2}}$.

# Разложение в ряды

Выше мы показали, что любую функцию, голоморфную в поликруге ***U(a,r)*** можно в этом поли круге разложить в кратный степенной ряд с центром $a$. Возникает вопрос о множестве точек сходимости такого ряда. По аналогии с функциями одной переменной хочется ожидать, что таким множеством будет поликруг, дополненный некоторой совокупностью точек его границы. Однако саамы простые примеры показывают, что дело обстоит иначе.

1. Множество сходимости степенного ряда

$$\frac{1}{1 - z_1 z_2} = \sum_{s=0}^{\infty} z_2^s z_1^s$$

в $\mathrm{C}^2$ представляет собой полную область Рейнхарта $\{|z_1 z_2|\} < 1$.

2. Для ряда

$$\frac{z_1}{(1 - z_1)(1 - z_2)} = \sum_{|k|=0}^{\infty} z_2^{k_1+1} z_1^{k_2}$$

множество сходимости в $\mathrm{C}^2$ является бикруг $\{|z_1| < 1, |z_2| < 1\}$, дополненный комплексной прямой $\{z_1 = 0\}$.

Определение. *Областью сходимости* степенного ряда

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} c_k\,(z-a)^k \qquad (**)$$

называется открытое ядро $\dot{\boldsymbol{S}}$ множества $\boldsymbol{S}$ точек $z \in \boldsymbol{C}^n$, в которых этот ряд сходится при каком-либо порядке следования его членов.

Из леммы Абеля вытекает, что данное множество является полной областью Рейнхарта с центром в $a$.

Теорема. Любая функция $f$, голоморфная в полной области Рейнхарта $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{C}^n$ с центром в $a$, представляется в этой области тейлоровским разложением

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} c_k\,(z-a)^k$$

Таким образом, полные области Рейнхарта в случае функций многих переменных играют ту же роль, что круги в случае одного переменного.

Однако не любая полная область Рейнхарта является областью сходимости какого-либо степенного ряда.

Определение. Поликруг называется *поликругом сходимости* ряда (**), если $U \subset \overline{\boldsymbol{S}}$, но в любом поликруге $\{z \in \boldsymbol{C}^n\colon |z_v - a_v\} < r'_v\}$, где $r'_v \geq r_v$ $(v = 1, \dots, n)$ и, по крайней мере, одно неравенство строгое, имеются точки, в которых ряд (**) расходится. Радиусы $r_v$ этого поликруга называют *сопряженными радиусами сходимости*.

Теорема. Сопряженные радиусы сходимости ряда (**) удовлетворяют соотношению

$$\overline{\lim_{|k|\to\infty} \sqrt[|k|]{|c_k| r^k}} = 1$$

(пространственный аналог формулы Коши-Адамара).

Теорема. Всякую функцию $f$, голоморфную в произведении круговых колец $\Pi = \{z \in \boldsymbol{C}^n\colon r_v < |z_v - a_v| < R_v\}$, можно представить в $\boldsymbol{\Pi}$ в виде кратного ряда Лорана

$$f(z) = \sum_{|k|=-\infty}^{\infty} c_k\,(z-a)^k,$$

в котором суммирование распространяется на все целочисленные векторы $k$, а коэффициенты

$$c_k = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{f(\zeta)\, d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}.$$

где $\boldsymbol{\Gamma}$ – произведение окружностей $\gamma_v: \zeta_v = a_v + \rho_v e^{i\theta}$ $(v = 1, \dots, n;\ r_v < \rho_v < R_v; 0 \leq \theta \leq 2\pi)$.

## Голоморфные отображения

Определение. Пусть $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{C^n}$ и $f = (f_1, \dots, f_m): \boldsymbol{D} \to \boldsymbol{C^m}$; это отображение называется *голоморфным*, если все его компоненты $f_\mu$ $(\mu = 1, \dots, m)$ голоморфны в $\boldsymbol{D}$.

Если $\boldsymbol{U}$ - окрестность точки $z \in \boldsymbol{C^n}$ и $f: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{C^m}$ – голоморфное отображение, то для вектора $h \in C^n$ с достаточно малым $|h|$ справедливо разложение

$$f(z + h) = f(z) + df(h) + o(|h|).$$

С-линейное отображение $df(h) = f'(z)h$, где $f'(z) = (\frac{\partial f_\mu}{\partial z_v})$ – матрица Якоби, а $h$ - вектор-столбец, называется *дифференциалом отображения* $f$ в точке $z$. Точка z называется *некритической*, если ранг матрицы Якоби максимален. При $m = n$ можно сосчитать определитель матрицы

$$\det f'(z) = J_f(z),$$

который называется якобианом отображения $f$ в точке $z$; в некритических точках и только в них $J_f(z) \neq 0$.

Для голоморфного отображения $f: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{C^n}$, где $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{C^n}$

$$\begin{aligned} df_1 \wedge \dots \wedge df_n &= \left(\frac{\partial f_1}{\partial z_1} dz_1 + \dots + \frac{\partial f_1}{\partial z_1} dz_n\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{\partial f_n}{\partial z_1} dz_1 + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial z_1} dz_n\right) \\ &= J_f(z) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n \end{aligned}$$

И аналогично для комплексно сопряженного отображения

$$d\bar{f}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{f}_n = \overline{J_f(z)} d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n.$$

Теорема. Если $f: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{C^n}$ – голоморфное отображение окрестности точки $z \in \boldsymbol{C^n}$, то якобиан $f$, рассматриваемого как отображение окрестности из $R^{2n}$ в $R^{2n}$, равен квадрату модуля комплексного якобиана:

$$J_f^r = \left|J_f(z)\right|^2.$$

Из этой теоремы вытекают комплексные варианты теорем об обратной и неявной функциях.

Теорема. Пусть $\boldsymbol{U} \subset \boldsymbol{C^n}$ – окрестность точки $z^0$ и $f: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{C^n}$ – голоморфное отображение. Если якобиан $J_f(z^0) \neq 0$, то $f$ взаимно однозначно в окрестности $\boldsymbol{V} \subset \boldsymbol{U}$ точки $z^0$ и обратное отображение $g = f^{-1}$ голоморфно в точке $w^0 = f(z^0)$. При этом матрица $g'(w)$ обратна к матрице $f'(z)$ для всех $z \in \boldsymbol{V}$ и $w = f(z)$.

Теорема (обратная). Пусть $\boldsymbol{U} \in \boldsymbol{C^n}$ – окрестность точки $z^0$ и $f: \boldsymbol{U} \to \boldsymbol{C^n}$ – голоморфное отображение. Если $f$ взаимно однозначно в окрестности $z^0$, то якобиан $J_f(z^0) \neq 0$.

Теорема. Если функции $f_1, \dots, f_k$ $(k < n)$ голоморфны в окрестности точки $z^0 \in \boldsymbol{C^n}$ и там $\det\left(\frac{\partial f_\mu}{\partial z_v}\right) \neq 0$ $(\mu, v = 1, \dots, k)$, то система уравнений $f_1(z) = \dots = f_k(z) = 0$ локально разрешима относительно $z_1, \dots, z_k$ и решение $z_v = g_v(z_{k+1}, \dots, z_n)$ $(v = 1, .., k)$ голоморфно в окрестности точки $(z_{k+1}^0, \dots, z_n^0)$.

## Биголоморфные отображения

Определение. Отображение $f$ области $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{C^n}$ называется *биголоморфным*, если оно голоморфно в $\boldsymbol{D}$ и имеет обратное отображение $g = f^{-1}$, голоморфное в области $\boldsymbol{G} = f(\boldsymbol{D})$.

Любое голоморфное взаимно однозначное отображение $f: \boldsymbol{D} \to f(\boldsymbol{D})$ биголоморфно. При $n > 1$ свойство биголоморфности не совпадает с конформностью. Например, в $C^2$ отображение $(z_1, z_2) \to (z_1, 2z_2)$ биголоморфно, но не конформно, а конформное отображение $z \to z/|z|^2$ не является ни голоморфным, ни антиконформным.

Теорема. При $n > 1$ не существует биголоморфного отображения шара $\boldsymbol{B^n}$ на поликруг $\boldsymbol{U^n}$.

Мы видим, что теорема Римана о биголоморфной эквивалентности плоских односвязных областей на пространственные области не распространяется. Это связано с переопределённостью условий голоморфности при $n > 1$: для отображений $f = (f_1, \dots, f_n)$ областей $\boldsymbol{C^n}$ условия Коши-Римана $\frac{\partial f_\mu}{\partial \bar{z}_\mu} = 0$ состоят из $2n^2$ комплексных дифференциальных уравнений относительно $n$ неизвестных комплексных функций.

## Голоморфное продолжение

Теорема. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ голоморфны в областях $\boldsymbol{G_1}$ и $\boldsymbol{G_2}$ соответственно и $\boldsymbol{G_1} \cap \boldsymbol{G_2}$ – область. Пусть, далее, в вещественной окрестности $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x^0}, \boldsymbol{r})$, $y = y^0$ точки $z^0 = x^0 + iy^0$ из $\boldsymbol{G_1} \cap \boldsymbol{G_2}$ функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают. Тогда эти функции являются голоморфным продолжением одна другой, т.е. существует единственная функция $f(z)$, голоморфная $\boldsymbol{G_1} \cup \boldsymbol{G_2}$ и совпадающая с $f_1(z)$ в $\boldsymbol{G_1}$ и с $f_2(z)$ в $\boldsymbol{G_2}$.

Если $\boldsymbol{G_1} \cap \boldsymbol{G_2}$ не есть область, то $f(z)$ может быть неоднозначной в $\boldsymbol{G_1} \cup \boldsymbol{G_2}$.

Теорема. Если функция $f(x)$ вещественных переменных $x$ голоморфна в области $\boldsymbol{D} \subset \boldsymbol{R^n}$, то существует единственная функция $F(z)$, голоморфная в некоторой области $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{C^n}$ и совпадающая с $f(x)$ при $x \in \boldsymbol{D}$.

Определение. Область $\boldsymbol{G}$ называется *областью голоморфности* функции $f(z)$, если $f(z)$ голоморфна в $\boldsymbol{G}$ и не голоморфна в большей области (точнее, голоморфно не продолжается за пределы $\boldsymbol{G}$).

В ТФКП из теоремы Римана о возможности конформного отображения произвольной области на единичный круг, который также является областью голоморфности, следует, что всякая область есть область голоморфности.

Что же касается областей голоморфности в $\boldsymbol{C^n}$ $(n \geq 2)$ , то тут не всякая область есть область голоморфности. Для доказательства данного утверждения приведём пример:

Рассмотрим область в $\boldsymbol{C^2}$:

$$G\colon \{z = (z_1, z_2)\colon 1 < |z| = \sqrt{|z_1|^2 + |z_2|^2} < 5\}$$

Пусть $f(z)$ – произвольная функция, аналитическая в G. Рассмотрим функцию

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_1|=4} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1.$$

Функция *φ(z)* представляет собой интеграл, зависящий от переменных $z_1$и $z_2$ как от параметров. Подобласть $\{|\zeta_1| = 4, |z_2| < 3\}$ принадлежит $G$. Поэтому функция *φ(z)* является голоморфной по каждой переменной $z_1$ и $z_2$ , а, следовательно, и по совокупности в поликруге $U\colon \{|z_1| < 4, |z_2| < 3\}$. В силу формулы Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta_1|=4} \frac{f(\zeta_1, z_2)}{\zeta_1 - z_1} d\zeta_1 = f(z_1, z_2).$$

Отсюда следует, что в $U$ аналитические функции совпадают. Тем самым в расширенной области, а именно в шаре $B((0,0),5)$, функция является голоморфной. Тем самым область $G$ не является областью голоморфности.

Определение. Граничные точки области голоморфности функции называются *особыми точками* этой функции.

# Формула Стокса

Рассмотри сначала вещественное $n$-мерное многообразие $\boldsymbol{M}$; оно предполагается гладким, как и все другие рассматриваемые в дальнейшем объекты.

Определение. *Дифференциальной формой* степени $r \le n$ на $\boldsymbol{M}$ называют выражение, которое

1) в локальных координатах $x = (x_0, \dots, x_n)$, действующих в окрестности $U \subset M$, представляется в виде

$$\omega = \sum\nolimits_I' f_I dx_I$$

где $I = (i_1, \dots, i_r)$ – мультииндекс, штрих означает, что суммирование ведётся по индексам $I$ таким, что $1 \le i_1 < i_2 < \ldots < i_r \le n$, а $f_I$ – функции, определённые в $\boldsymbol{U}$, и $dx_I = dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_r}$;

*2)* при замене координат $x \to y$ принимает вид

$$\omega = \sum\nolimits_J' g_J dy_J \text{ с } g_J = \sum\nolimits_I' f_I \frac{\partial x_I}{\partial y_J},$$

где $\frac{\partial x_I}{y_J} = \frac{\partial(x_{i_1}, \dots, x_{i_r})}{\partial(y_{j_1}, \dots, y_{j_r})}$ – функциональный определитель.

Совокупность форм степени $\boldsymbol{r}$ на многообразии $\boldsymbol{M}$ обозначается через ʝ$^r(\boldsymbol{M})$.

На комплексном многообразии понятие степени можно уточнить. Формы здесь представляются в виде

$$\omega = \sum\nolimits_{I,J}' f_{I,J} dz_I \wedge d\bar{z}_J, \qquad (***)$$

где $I = (i_1, \dots, i_r), J = (j_1, \dots, j_s)$ – упорядоченные мультииндексы, $dz_I = dz_{i_1} \wedge \dots \wedge dz_{i_r}, d\bar{z}_J = d\bar{z}_{j_1} \wedge \dots \wedge dz_{j_s}$ и $f_{I,J}$ – локально заданные гладкие комплексные функции. Так как замены локальных координат $z \to w$ на комплексном многообразии – голоморфные отображения, то при таких заменах $dz_I = \sum_K' \frac{\partial z_I}{\partial w_K} dw_K, d\bar{z}_J = \sum_L' \frac{\partial \bar{z}_J}{\partial \bar{w}_L} d\bar{w}_L$ и, следовательно, в новых координатах

$$\omega = \sum\nolimits_{K,L}' g_{KL} dw_K \wedge d\bar{w}_L \text{ с } g_{KL} = \sum\nolimits_{I,J}' f_{I,J} \frac{\partial z_I}{\partial w_K} \frac{\partial \bar{z}_J}{\partial \bar{w}_L}.$$

Мы видим, что число дифференциалов $dz_J$и $d\bar{z}_K$ в выражении формы (***) не зависит от выбора локальных координат. Мы будем говорить, что *ω – (r,s)*-форма, если в её локальном выражении $r$ дифференциалов $dz_I$ и $s$ дифференциалов $d\bar{z}_K$. Совокупность *(r,s)*-форм с гладкими коэффициентами на комплексном многообразии $M$ обозначается символом ʝ$^{r,s}(\boldsymbol{M})$ или ʝ$^{r+s}(\boldsymbol{M})$. Формы $\sum' f_I dz_I$ бистепени *(r,0)* с голоморфными коэффициентами $f_I$ называются *голоморфными*.

Оператор дифференцирования форм на гладком (вещественном) многообразии локально определяется как преобразование $d$:ʝ$^r \to$ ʝ$^{r+1}$, сопоставляющее форме $\omega = \sum_I' f_I dx_I$ форму

$$d\omega = \sum_I df_I \wedge dx_I, \text{где } df_I = \sum_{v=1}^{n} \frac{\partial f_I}{\partial x_v} dx_v.$$

На комплексном многообразии оператор дифференцирования форм $d\colon Ɉ^{r+s} \to Ɉ^{r+s+1}$ расщепляется в сумму двух операторов $d = \partial + \bar{\partial}$ так, что $\partial\colon Ɉ^{(r,s)} \to Ɉ^{(r+1,s)}$ и $\bar{\partial}\colon Ɉ^{(r,s)} \to Ɉ^{(r,s+1)}$.

$$\text{Рассмотрим: } 0 = d^2\omega = \left(\partial + \bar{\partial}\right)\left(\partial\omega + \bar{\partial}\omega\right) = \partial^2\omega + \left(\bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial}\right)\omega + \overline{\partial^2}\omega,$$

т.к. справа каждое из трёх слагаемых состоит из форм различной бистепени, то их сумма может равняться нулю, если каждое нулевое.

$$\partial^2 = \bar{\partial}\partial + \partial\bar{\partial} = \overline{\partial^2} = 0.$$

Интеграл от формы $\omega \in Ɉ^k$ на гладком многообразии $\boldsymbol{M}$ определяется для k-мерных клеток $\gamma$, т.е. гладких отображений k-мерного куба $\boldsymbol{Q^k} = \boldsymbol{I} \times \ldots \times \boldsymbol{I} \subset \boldsymbol{R^k}$ в $\boldsymbol{M}$. Если образ $\gamma(\boldsymbol{Q^k})$ лежит в пределах одной координатной окрестности, где форма $\omega = \sum_J' f_J dx_J$, то интеграл от ω по клетке $\gamma$ определяется по формуле

$$\int_\gamma \omega = \int_{Q^k} \sum\nolimits_J' f_J \circ \gamma \frac{\partial\left(x_{J_!}, \ldots, x_{J_k}\right)}{\partial(t_1, \ldots, t_k)} dt_1 \ldots dt_k \,.$$

В общем случае клетки $\gamma\colon \boldsymbol{Q^k} \to \boldsymbol{M}$ надо воспользоваться разбиением единицы.

Понятие интеграла распространяется на *k*-мерные цепи, т.е. формальные линейные комбинации *k*-мерных клеток $\gamma_v\colon \boldsymbol{Q^k} \to \boldsymbol{M}$ с целочисленными коэффициентами.

Определим граничный оператор $\partial$, который *k*-мерной клетке $\gamma\colon \boldsymbol{Q^k} \to \boldsymbol{M}$ сопоставляет *(k-1)*-мерную цепь $\partial\gamma$ по следующему правилу: обозначим $t = (t_1, \ldots, t_k)$, для каждого $j = 1, \ldots, k$ рассмотрим две *(k-1)*-мерные грани куба $\boldsymbol{Q_{j,0}^{k-1}} = \left\{t \in \boldsymbol{Q^k}\colon t_j = 0\right\}$ и $\boldsymbol{Q_{j,1}^{k-1}}\left\{t \in \boldsymbol{Q^k}\colon t_j = 1\right\}$ и положим

$$\partial\gamma = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \{\gamma/\boldsymbol{Q_{j,1}^{k-1}} - \gamma/\boldsymbol{Q_{j,0}^{k-1}}\},$$

где через $\gamma/\boldsymbol{Q_{j,\alpha}^{k-1}}$ обозначено сужение отображения $\gamma$ на грань $\boldsymbol{Q_{j,\alpha}^{k-1}}$.

Теперь представим теорему Стокса – основную теорему многомерного действительного анализа, являющуюся в частных случаях формулами Ньютона-Лейбница, Грина, Остроградского – Гаусса.

Теорема (Формула Стокса). Для любой формы ω степени $k$-$1$ на $n$ – мерном многообразии $\boldsymbol{M}$ $(k \leq n)$ интеграл по $k$-мерной цепи $\sigma: \boldsymbol{Q^k} \rightarrow \boldsymbol{M}$ от $d\omega$ равен интегралу от $\omega$ по границе $\partial\sigma$:

$$\int_{\sigma} d\omega = \int_{\partial\sigma} \omega$$

Любое n-мерное комплексное многообразие $\boldsymbol{M}$ можно рассматривать как *2n*- мерное вещественное. В качестве локальных координат тогда мы можем рассматривать набор из *2n* комплексных функций $z_v(p), \bar{z}_v(p)$, которые связаны с функциями первого набора невырожденными линейными соотношениями $z_v = x_v + iy_v, \bar{z}_v = x_v - iy_v$.

Формула Стокса останется справедливой и на комплексных многообразиях, если оператор дифференцирования *d* выражать в этих локальных координатах $z, \bar{z}$**.** Понятие *k*-мерной цепи переносится на комплексные многообразия без изменений. По таким цепям можно интегрировать (*r*,*s*)-формы с комплексными коэффициентами, и формула Стокса в приведённом выше виде сохраняется.

Отсюда вытекает доказательство теоремы, которая распространяет на многомерный случай основную теорему Коши:

Теорема (Коши-Пуанкаре). Пусть $\boldsymbol{M}$ - комплексное многообразие размерности *n* и *ω* – голоморфная форма степени *n* на этом многообразии. Тогда интеграл от *ω* по границе любой *(n+1)*-мерной цепи $\sigma \subset \boldsymbol{M}$ равен нулю:

$$\int_{\partial\sigma} \omega = 0$$

Укажем более частный случай теоремы.

Пусть $f \in \boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{D})$ и $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G_1} \times \ldots \times \boldsymbol{G_n}$ – поликруговая область, компактно принадлежащая $\boldsymbol{D}$. Остов такой области $\Gamma = \boldsymbol{\partial G_1} \times \ldots \times \boldsymbol{\partial G_n}$ является границей *(n+1)*-мерных замкнутый областей $\boldsymbol{S_v} = \boldsymbol{\partial G_1} \times \ldots \times \overline{\boldsymbol{G}}_{\boldsymbol{v}} \times \ldots \times \boldsymbol{\partial G_n} \subset \boldsymbol{D}$. Поэтому для любой такой области $\boldsymbol{G}$ интеграл по её остову

$$\int_{\Gamma} f dz = 0, dz = dz_1 \wedge \ldots \wedge dz_n.$$

# Заключение

Как и предполагалось, при обобщении соответствующих понятий для функций многих комплексных переменных были получены некоторые идейные расхождения, которые до поры до времени не прослеживаются в силу аналогичности определений. Основной причиной этого для обобщения из ТФКП служила переопределённость условий Коши-Римана, для функций многих действительных переменных – введенная асимметрия вещественного пространства.

## Список литературы:


1. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Функции нескольких переменных: Учебник: В 2-х ч. Ч.2. – СПб.: Издательство «Лань», 2004. 464с.

2. Спивак М. Математический анализ на многообразиях. М.: Издательство «Мир»,1968. 164с.

3. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Издательство «Наука», 1967. 304с.

4. Владимиров В.С. Методы теории функции многих комплексных переменных. М.: Издательство «Наука», 1964. 412с.

5. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Издательство «Наука»,1989. 472с.