

КУРСОВАЯ РАБОТА ПО ПРОГРАММИРОВАНИЮ

СТУДЕНТА 218 ГРУППЫ ФИЗИЧЕСКОГО ФАКУЛЬТЕТА

МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА

ИМЕНИ М. В. ЛОМОНОСОВА

ГАМОВА АРТЕМИЯ ЛЬВОВИЧА.

ТЕМА: “Задача Коши для системы Лоренца”.

2012-2013 ГГ.

СОДЕРЖАНИЕ.

1. Введение.	3
2. Модель.	3
Описание физической системы.	3
Линейный анализ устойчивости стационарных решений.	5
3. Методы решения.	7
Виды методов.	7
Определение погрешностей.	7
4. Анализ полученных решений.	8
Проверка результатов линейного анализа.	8
Отображение первого возвращения	9
5. Выводы.	10

Введение.

В 1963 г. Американский исследователь Эдвард Лоренц, занимавшийся проблемами прогноза погоды, опубликовал в журнале “Journal of Atmospheric Sciences” статью “Детерминированное неперiodическое течение”. Эта работа была посвящена исследованию модельной нелинейной системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, которая получалась как результат определенных приближений при анализе задачи о конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости. Интересно, что система уравнений Лоренца оказалась применимой не только к задаче о конвекции в слое (где она служит довольно грубым, не очень точным приближением), но и к другим системам. К ним относятся одномодовая модель лазера, конвекция в трубе, модель водяного колеса, диссипативный осциллятор с инерционным возбуждением.

МОДЕЛЬ.

Описание физической системы.

Рассмотрим задачу о конвекции в подогреваемом снизу слое.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} Y - \nu(\alpha^2 + \beta^2) X, \\ \dot{Y} &= \frac{\alpha\Delta T}{h} X - \kappa(\alpha^2 + \beta^2) Y - \beta\alpha X Z, \\ \dot{Z} &= -4\kappa\beta^2 Z + \frac{1}{2}\alpha\beta XY.\end{aligned}$$

Система уравнений описывающая поведение плоского слоя воды. Для удобства обезразмерим уравнения.

Подставим $X = Ax$, $Y = By$, $Z = Cz$, $T = Dt$. Где А, В, С, D некоторые постоянный коэффициенты. Таким образом, получим:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{BD}{A} y - D\nu(\alpha^2 + \beta^2) x, \\ \dot{y} &= \frac{\alpha\Delta T}{h} \frac{AD}{B} x - D\kappa(\alpha^2 + \beta^2) y - \frac{ACD}{B} \beta\alpha x z, \\ \dot{z} &= -4\kappa\beta^2 Dz + \frac{ABD}{2C} \alpha\beta xy,\end{aligned}$$

Где точка обозначает производную по t . Попробуем подобрать коэффициенты так, что бы вид уравнений максимально упростился. Положим

$$D = \kappa^{-1}(\alpha^2 + \beta^2)^{-1}, \quad \frac{\alpha\gamma g}{\alpha^2 + \beta^2} \frac{BD}{A} = \frac{\nu}{\kappa},$$

$$\frac{ACD}{B}\beta\alpha = 1, \quad \frac{ABD}{2C}\alpha\beta = 1,$$

Откуда можно найти

$$A = \frac{\sqrt{2}\kappa(\alpha^2 + \beta^2)}{\alpha\beta}, \quad B = \frac{\sqrt{2}\kappa\nu(\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta\gamma g}, \quad C = \frac{\kappa\nu(\alpha^2 + \beta^2)^3}{\alpha^2\beta\gamma g}.$$

Кроме того, введем безразмерные параметры

$$\sigma = \frac{\nu}{\kappa}, \quad b = \frac{4\beta^2}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{4}{1 + a^2}, \quad r = \frac{\alpha^2\gamma g\Delta T}{\kappa\nu h(\alpha^2 + \beta^2)^3}.$$

Тогда уравнения принимают вид

$$\dot{x} = \sigma(y - x), \quad \dot{y} = rx - y - xz, \quad \dot{z} = -bz + xy.$$

Физический смысл переменных, фигурирующих в уравнениях Лоренца.

Переменная x характеризует скорость вращения конвекционных валов, величины y и z отвечают за распределение температуры, соответственно, по горизонтали и вертикали.

Параметр b определяется геометрией конвекционной ячейки, а именно, отношение ее вертикального и горизонтального размеров a . Параметр σ есть отношение коэффициента кинематической вязкости и коэффициента температуропроводности. Его называют числом Прандтля.

Комбинацию $R = g\gamma h^3\Delta T/\nu\kappa$ называют числом Релея. Параметр r

представляет собой отношение $\frac{R}{R_c}$. В данной работе $\sigma = 10$, $b = \frac{8}{3}$, r — варьируется.

Линейный анализ устойчивости стационарных решений.

Симметрия.

Прежде всего отметим симметрию уравнений Лоренца – их вид не изменится, если одновременно сменить знак x и y . Это значит, что любое образование в фазовом пространстве либо обладает той же симметрией, т. е. превращается само в себя при замене переменных $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, либо имеет такое же образование в качестве симметричного партнера.

Найдем стационарные точки системы уравнений Лоренца. Это состояния, не меняющиеся во времени т. е. производные динамических переменных по времени надо приравнять нулю. Следовательно, правые части уравнения тоже должны обращаться в нуль. Это дает три алгебраических уравнения для 3 неизвестных:

$$\sigma(y - x) = 0; \quad -xz + rx - y = 0; \quad xy - bz = 0;$$

Решая полученную систему получим стационарные решения:

При $r < 1$ имеем одно состояние равновесия, расположенное в начале координат, при $r > 1$ – три состояния равновесия:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0,$$

$$x = \sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{r-1}, \quad y = \sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{r-1}, \quad z = r-1, (O_1)$$

$$x = -\sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{r-1}, \quad y = -\sqrt{\frac{8}{3}}\sqrt{r-1}, \quad z = r-1, (O_2)$$

Анализ неподвижных точек на устойчивость.

Линеаризуем систему уравнений возле точки стационарного решения:

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \frac{d}{dx}(10(y-x)) - \lambda & \frac{d}{dy}(\sigma(y-x)) & \frac{d}{dz}(\sigma(y-x)) \\ \frac{d}{dx}(-xz + rx - y) & \frac{d}{dy}(-xz + rx - y) - \lambda & \frac{d}{dz}(-xz + rx - y) \\ \frac{d}{dx}(xy - bz) & \frac{d}{dy}(xy - bz) & \frac{d}{dz}(xy - bz) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Det} \begin{vmatrix} \lambda + \sigma & -\sigma & 0 \\ -r + z & \lambda + 1 & x \\ -y & -x & \lambda + b \end{vmatrix} = 0$$

Получим квадратное уравнение относительно λ .

$$(\lambda + \sigma)[(\lambda + 1)(\lambda + b) + x^2] + \sigma[(\lambda + b)(z - r) + xy] = 0;$$

Для неподвижной точки, расположенной в начале координат:

$$(\lambda + \sigma)[\lambda^2 + (\sigma + 1)\lambda + \sigma(1 - r)] = 0:$$

Откуда находим три корня:

$$\lambda_1 = -b, \quad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2}(\sigma + 1) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\sigma + 1)^2 + \sigma(r - 1)}.$$

Первое собственное число всегда отрицательно. Второе и третье, оба являются отрицательными лишь при $r < 1$; если же $r > 1$ одно из них становится положительным. Следовательно, точка O устойчива при $r < 1$ и неустойчива при $r > 1$. С точки зрения классификации неподвижных точек, при $r < 1$ это устойчивый узел, а при $r > 1$ – седло-узел.

Обратимся теперь к точкам O_1 и O_2 , которые существуют, как было показано, при $r > 1$. Подставляя x, y, z получаем кубическое уравнение относительно λ :

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Исследование уравнения показывает, что при $r < 1.34562$, все 3 собственных числа λ отрицательны. Следовательно, неподвижные точки O_1 и O_2 являются устойчивыми узлами. При $r > 1.34562$ они становятся устойчивыми фокусами – одно собственное число действительное и отрицательное, а два других комплексносопряженные с отрицательной действительной частью. При дальнейшем увеличении r действительная часть меняет знак, и это момент потери устойчивости состояниями O_1 и O_2 (в силу симметрии это происходит одновременно).

Найдем порог устойчивости.

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + b(\sigma + r)\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Подставим $\lambda = iw$.

$$iw^3 + (\sigma + b + 1)iw^2 + b(\sigma + r)iw + 2\sigma b(r - 1) = 0.$$

Отсюда найдем порог устойчивости:

$$r_{\text{пор}} = \frac{\sigma(\sigma+b+3)}{\sigma-b-1} = \frac{470}{19} = 24.7368421.$$

Чтобы детально изучить поведение системы, описанной уравнением, вдали от точек, являющихся стационарными решениями, нам необходимо получить его решение. Нахождение аналитического решения подобных уравнений затруднительно, в связи с чем будут использованы численные методы решения дифференциальных уравнений.

МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ.

Виды методов.

Итак, наша задача сводится к численному решению системы уравнений по известным начальным условиям, то есть по известным значениям $\mathbf{x}(t=0)$, $\mathbf{y}(t=0)$, $\mathbf{z}(t=0)$. Это – не что иное, как задача Коши для соответствующего дифференциального уравнения второго порядка. Проблема заключается в выборе способа численного интегрирования нашего уравнения.

В данной задаче применяются два метода численного интегрирования, один из которых – метод Рунге-Кутты четвертого порядка точности, а другой – метод Эйлера первого порядка точности.

Метод Рунге-Кутты обладает значительной точностью и, несмотря на свою трудоёмкость, широко используется при численном решении дифференциальных уравнений.

Метод Эйлера обладает намного меньшей точностью, чем метод Рунге-Кутты, но значительно более прост в реализации.

Результатом работы методов являются значения $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$, рассчитанные с шагом по времени Δt .

Определение погрешностей.

Как уже было отмечено, методы Эйлера и Рунге-Кутты обладают разным порядком точности и, следовательно, выдают решение уравнения с различной точностью.

Погрешность метода Рунге-Кутты:

$$\mathbf{E}_x = \frac{|\mathbf{x}_n(\Delta t) - \mathbf{x}_n(\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2})|}{15} \quad \mathbf{E}_y = \frac{|\mathbf{y}_n(\Delta t) - \mathbf{y}_n(\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2})|}{15} \quad (1)$$

Погрешность метода Эйлера:

$$\mathbf{E}_x = \left| \mathbf{x}_n(\Delta t) - \mathbf{x}_n\left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2}\right) \right| \quad \mathbf{E}_y = \left| \mathbf{y}_n(\Delta t) - \mathbf{y}_n\left(\frac{\Delta t}{2} + \frac{\Delta t}{2}\right) \right| \quad (2)$$

Из формул (1), (2) видно, что погрешность зависит не только от метода, но и от шага Δt , с которым определяются значения $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$. Значит, можно регулировать величину погрешности, меняя шаг.

В нашей задаче реализован метод автоматического выбора шага для получения результатов с заданной погрешностью. Суть метода в том, что каждый раз перед расчетом следующих значений $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ выполняется расчет величины погрешности $\mathbf{E}_x(\Delta t)$ на предыдущем шаге. Если $\mathbf{E}_x(\Delta t) \leq \mathbf{E} < \mathbf{E}_x(2\Delta t)$, вычисления продолжаются с тем же

шагом Δt . В противном случае шаг уменьшается или увеличивается в 2 раза до тех пор, пока не будет получена погрешность $E_x(\Delta t)$, удовлетворяющая данному условию.

Сравним средние шаги для обоих методов при заданной погрешности:

Ошибка на шаге	Метод Рунге-Кутта	Эйлера
1,0E+000	1,7647E-001	3,9474E-002
1,0E-001	1,0345E-001	1,3575E-002
1,0E-002	6,9767E-002	4,6225E-003
1,0E-003	4,2857E-002	1,5038E-003
1,0E-004	3,0000E-002	4,7111E-004
1,0E-005	1,8405E-002	1,5173E-004
1,0E-006	1,1070E-002	4,6989E-005
1,0E-007	7,9156E-003	1,4938E-005
1,0E-008	4,6948E-003	4,8261E-006
1,0E-009	2,8708E-003	1,4908E-006
1,0E-010	2,0325E-003	4,6991E-007
1,0E-011	1,1811E-003	1,5181E-007
1,0E-012	7,2534E-004	4,7033E-008
1,0E-013	5,1538E-004	-
1,0E-014	2,9615E-004	-
1,0E-015	1,8309E-004	-
1,0E-016	1,3028E-004	-
1,0E-017	7,4189E-005	-
1,0E-018	4,5993E-005	-
1,0E-019	2,9652E-005	-
1,0E-020	5,5309E-006	-
1,0E-021	6,6952E-007	-
1,0E-022	4,9403E-008	-
1,0E-023	-	-

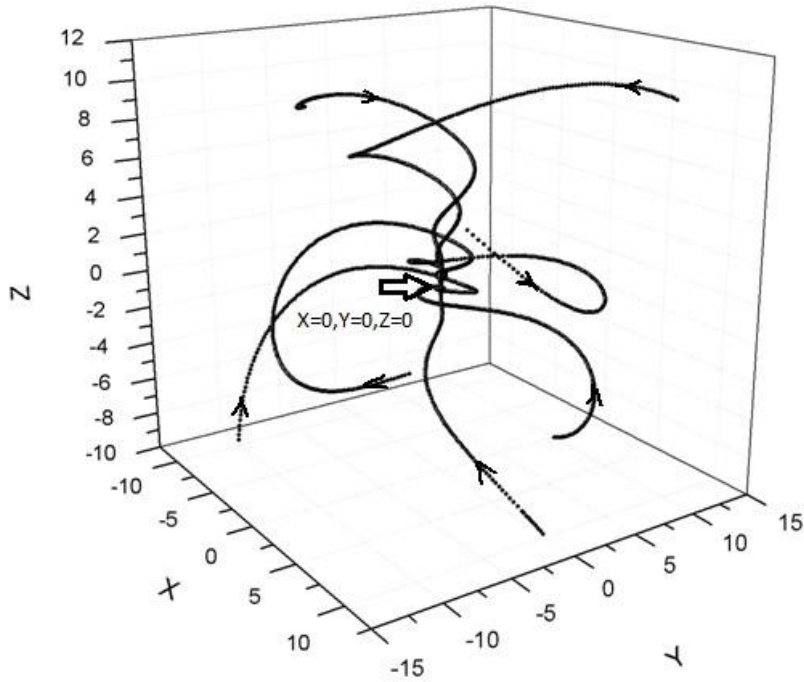
Из таблицы можно сделать вывод, что метод Рунге-Кутта потребует гораздо меньшее число вычислений, так как необходимое для соблюдения заданной погрешности количество шагов на порядок меньше, чем для метода Эйлера.

АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ.

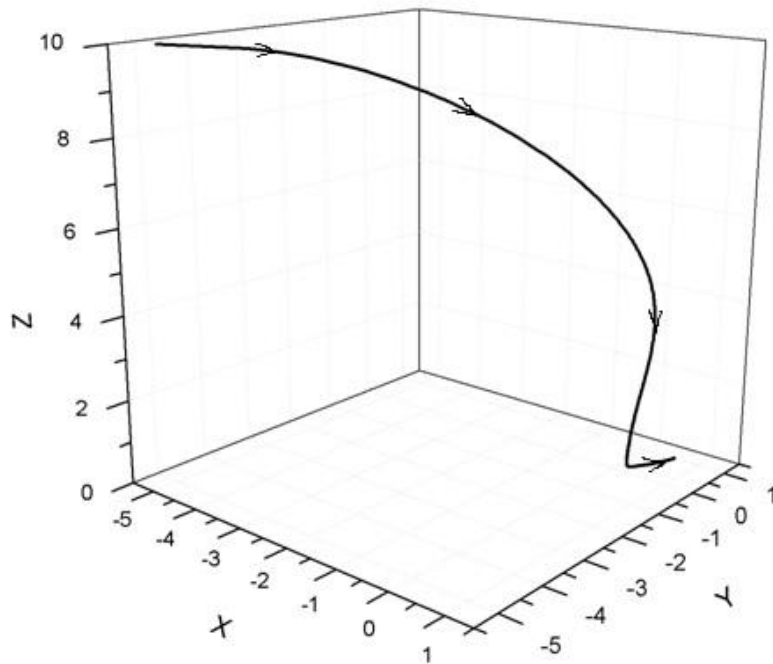
Проверка результатов линейного анализа.

Получив численное решение уравнения, мы можем оценить, насколько верно проведена процедура линейного анализа стационарных решений этого уравнения.

- При $r < 1$, начальные условия $x = 10, y = 10, z = 10$ ($r=10$) Начало координат – седло-узел.

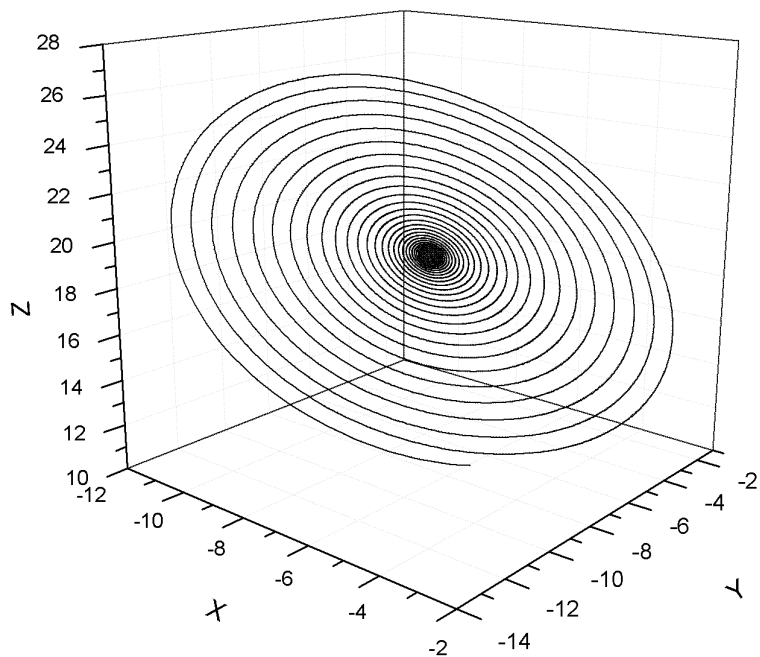


- При $1 < r < 1.34$ ($r = 1.2$) начальные условия $x = -5, y = -5, z = 10$
Начало координат не устойчивая точка (седло-узел), точки O_1 и O_2 являются устойчивыми узлами



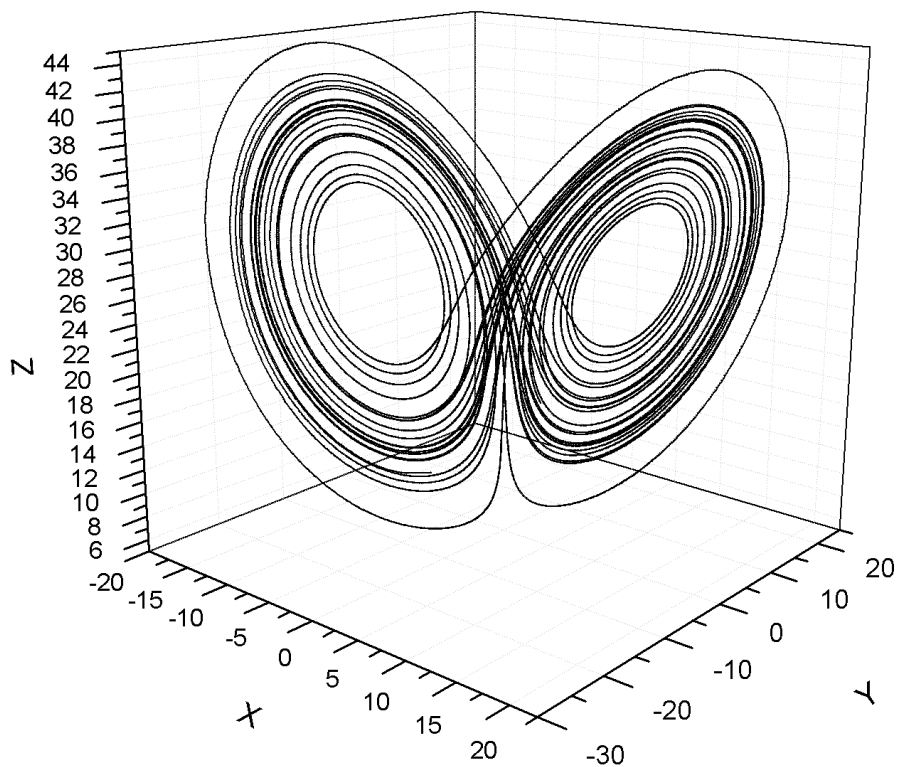
- При $1.34 < r < 24.7$ Начало координат не устойчивая точка (седло-узел), точки O_1 и O_2 являются устойчивыми фокусами

$r = 20$ начальные условия $x = 5, y = 5, z = 10$

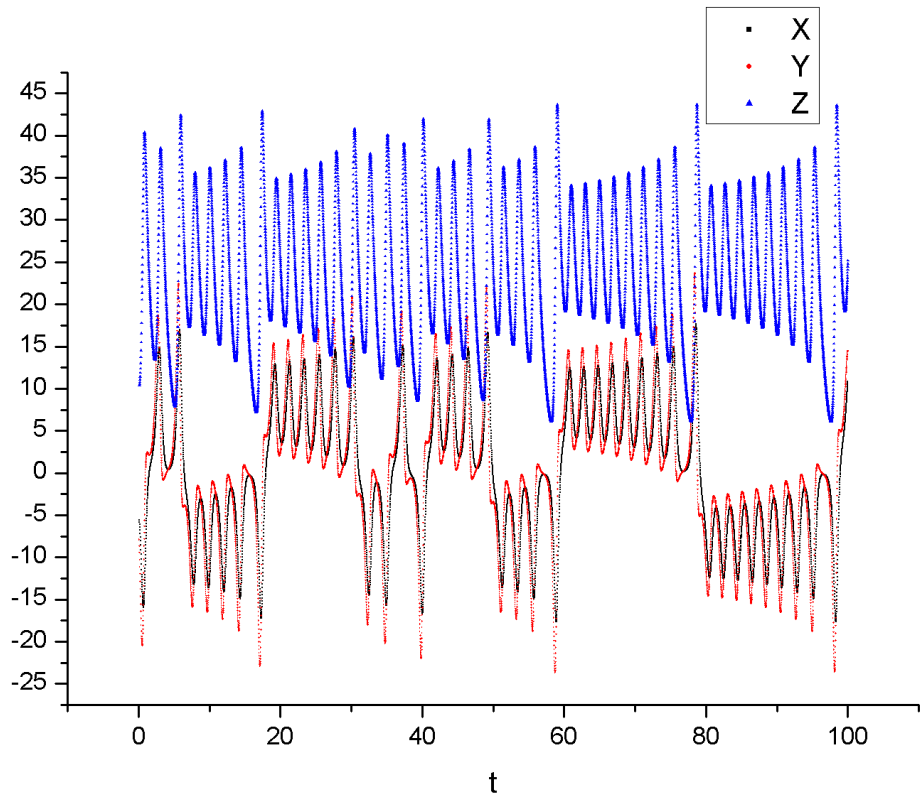


- При $r > 24.7$ Начало координат не устойчивая точка (седло-узел), точки O_1 и O_2 являются неустойчивыми фокусами $r = 28$ начальные условия $x = -5, y = -5, z = 10$

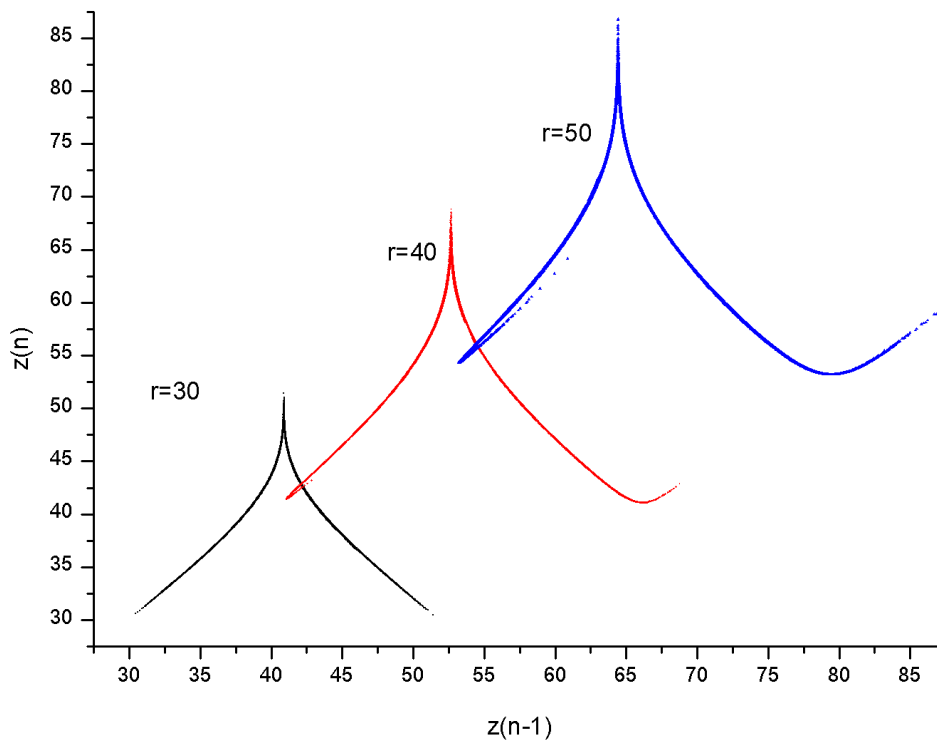
Наблюдается **аттрактор Лоренца**.



- График зависимости $x, y, z(t)$ $r=28$

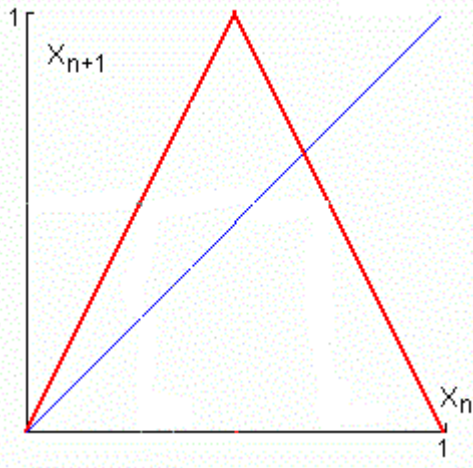


- График “Отображения первого возвращения”



Что бы показать динамическую природу наблюдаемого хаотического движения можно рассматривать не зависимость координат от времени, использовать другой прием. Можно рассмотреть зависимость $z(t)$ и пронумеровать наблюдаемые максимумы. Далее построить

зависимость очередного максимума от предыдущего. Совсем не очевидно, что такая процедура приведет к какому-либо разумному результату, но как видно из графика четко видно одномерное отображение $z_{k+1}=f(z_k)$. Это отображение очень похоже на отображение “Тент”, которое демонстрирует хаотическую динамику и для которого множество возможных траекторий допускает кодирование всевозможными последовательностями двух символов. Такими же свойствами обладает и система Лоренца, что доказывает динамическую природу хаоса наблюдаемую в ней.



Отображение “Тент”.

$$f(x) = \begin{cases} cx, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ c(1 - x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

ВЫВОДЫ.

В результате выполнения работы была исследована физическая модель о конвекции в подогреваемом снизу слое. Был проведен линейный анализ устойчивости стационарных решений системы Лоренца. Написана программа для численного решения этой системы, в которой использовались методы Эйлера и Рунге-Кутта 4 порядка. Анализ погрешности этих методов показал, что метод Рунге-Кутта 4 порядка точности является более рациональным, поэтому численные зависимости от параметра \mathbf{r} были получены именно этим методом. Полученные графики хорошо согласуются с линейным анализом устойчивости стационарных решений. Также построен график “Отображения первого возвращения”, который показывает динамическую природу хаотического поведения системы Лоренца.