Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Решение задачи переноса на прямой используя схему бегущего счета и итерационные методы.

Выполнил студент 417 группы
Гамов А. Л.

Москва, 2015

Решение задачи переноса на прямой используя схему бегущего счета и итерационные методы.

Необходимо решить следующую задачу:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 2ue^{-u^2}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad -1 < x < 0 \quad , \quad 0 < t < T, \tag{1}$$

$$u\Big|_{t=0} = -\sin\frac{\pi x}{2}, \tag{2}$$

$$u\Big|_{x=0} = 0. \tag{3}$$

Первым шагом ее численного решения является введение равномерное сетки
$G = \{x; \quad 0 < x < 1 \quad x_n = nh_x, \qquad n = 0, 1, 2...N\};$
$t = mdt, \qquad m = 0, 1, 2...M;$
Будем рассматривать сеточные функции u_n^m Воспользуемся схемой бегущего счета, чтобы решить численно задачу. Считать будем с помощью прямоугольного шаблона.

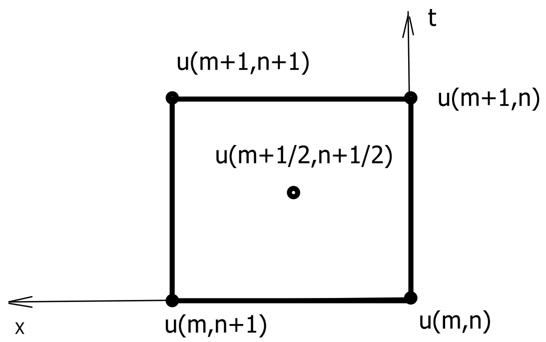

Figure 1: Шаблон

Данная неявная схема имеет точность $O(\tau^2+|h|^2)$ и безусловно устойчива. Перепишем уравнение (1) в другом виде.

$$\frac{\partial e^{-u^2}}{\partial x} = -2ue^{-u^2\frac{\partial_u}{\partial_x}}. \tag{4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial e^{-u^2}}{\partial x} = 0. \tag{5}$$

Запишем разностную апроксимацию для центральной точки шаблона ($x_i + 0.5h_x, t_j + 0.5dt$).

$$\frac{u_n^{m+1} - u_n^m + u_{n+1}^{m+1} - u_{n+1}^m}{2dt} + \frac{e^{-(u_{n+1}^m)^2} - e^{-(u_n^m)^2} + e^{-(u_{n+1}^{m+1})^2 - e^{-(u_{n+1}^m)^2}}}{2h_x} = 0; \tag{6}$$

Поскольку схема неявная, необходимо решить нелинейное уравнение $f(u_{n+1}^{m+1}) = 0$, чтобы найти u_{n+1}^{m+1}. Используем для этого метод Ньютона.

$$f(u_{n+1}^{m+1}) = \frac{u_n^{m+1} - u_n^m + u_{n+1}^{m+1} - u_{n+1}^m}{2dt} + \frac{e^{-(u_{n+1}^m)^2} - e^{-(u_n^m)^2} + e^{-(u_{n+1}^{m+1})^2} - e^{-(u_{n+1}^m)^2}}{2h_x} = 0;$$

$$f'(u_{n+1}^{m+1}) = \frac{1}{2dt} - \frac{u_{n+1}^{m+1} e^{-(u_{n+1}^{m+1})^2}}{h_x}; \quad (7)$$

Возьмем в качестве начального приближения $(u_{n+1}^{m+1})^0 = u_{n+1}^m$

$$u_{n+1}^{m+1,k+1} = u_{n+1}^{m+1,k} - \frac{f(u_{n+1}^{m+1,k})}{f'(u_{n+1}^{m+1,k})} \quad (8)$$

В нашем случае $u > 0, h_x < 0$ поэтому $f' > 0$. Поэтому можно использовать метод Ньютона. Ниже представлены графики $u(x)$ для разных t. А так же графики при различных dt.

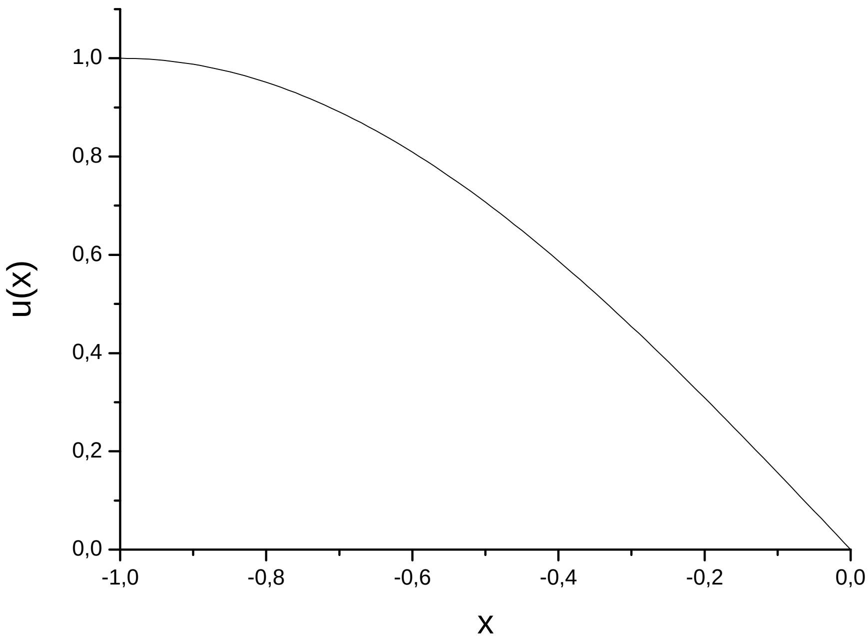

Figure 2: T=0, dt=0.01

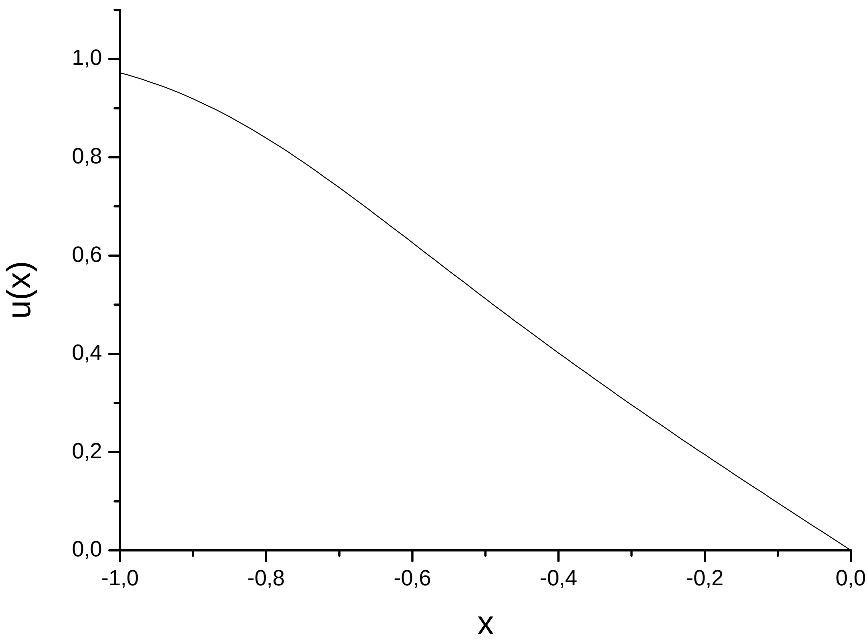

Figure 3: T=0.2, dt=0.01

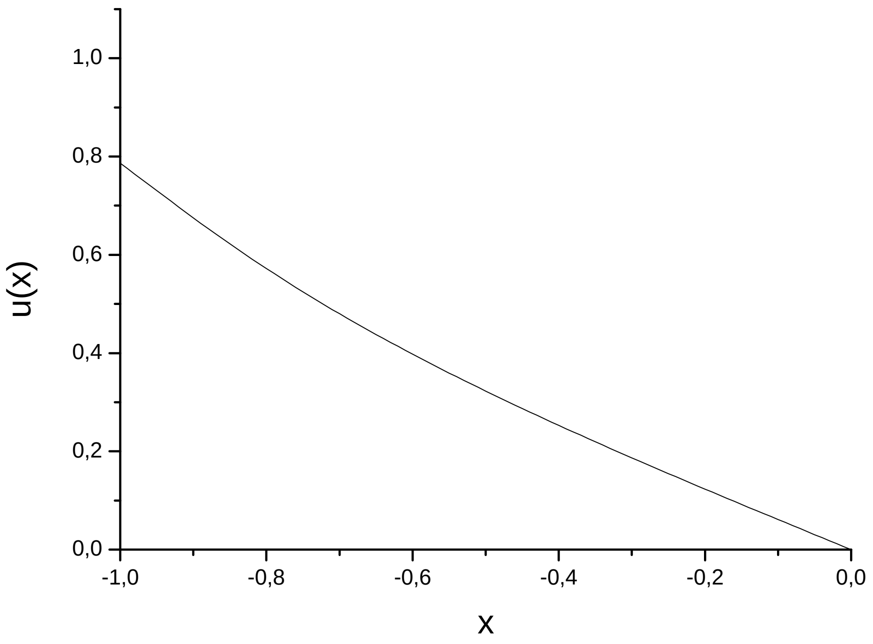

Figure 4: T=0.5, dt=0.01

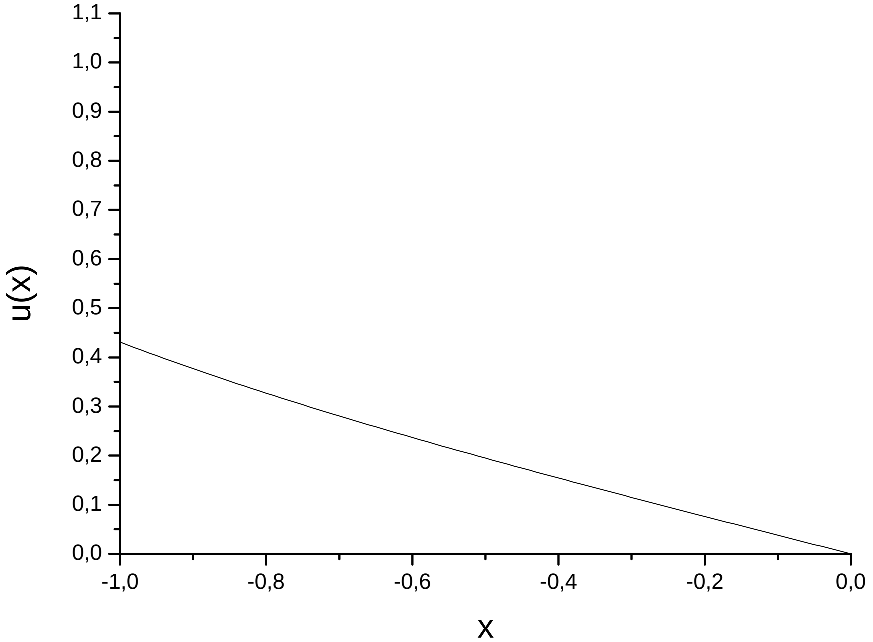

Figure 5: T=1, dt=0.01

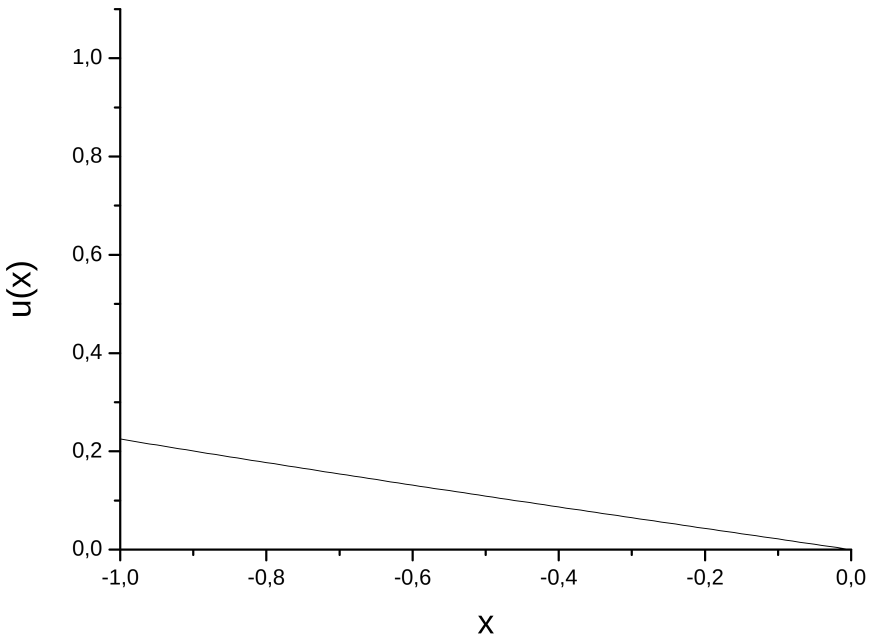

Figure 6: T=2, dt=0.01

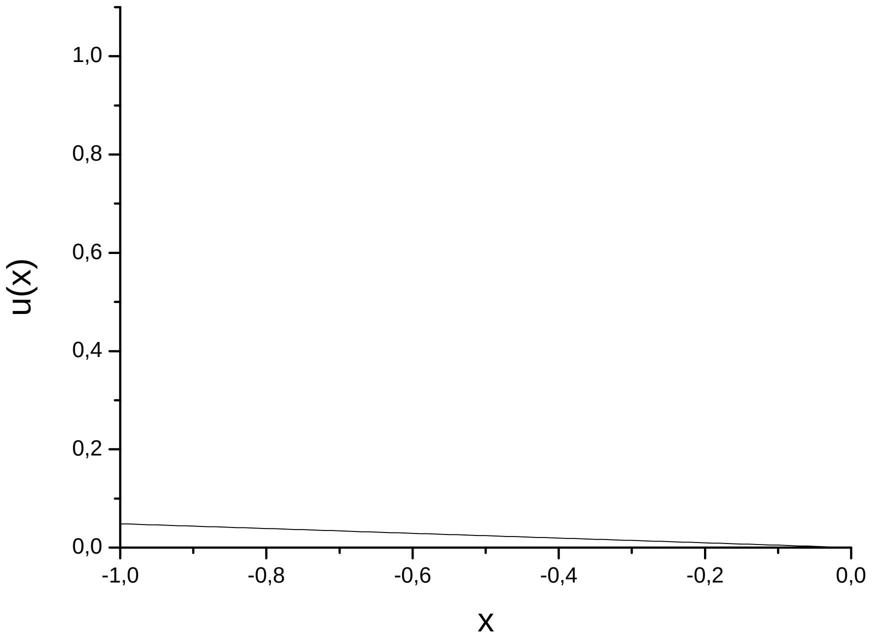

Figure 7: T=10, dt=0.01

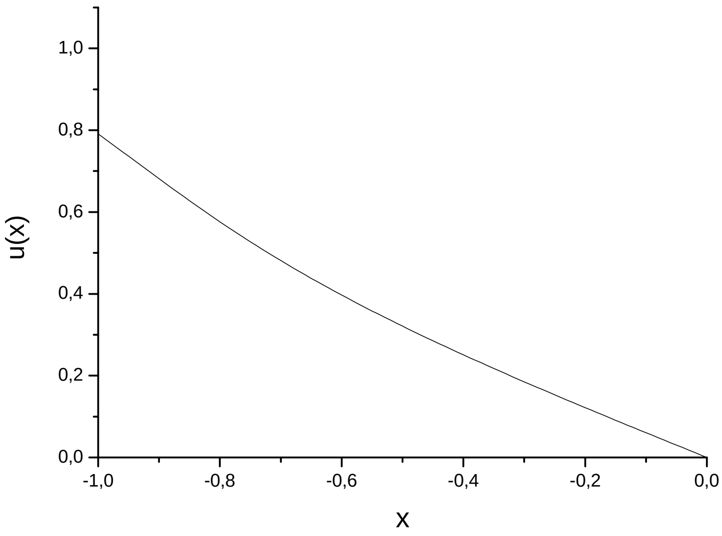

Figure 8: T=0.5, dt=0.1

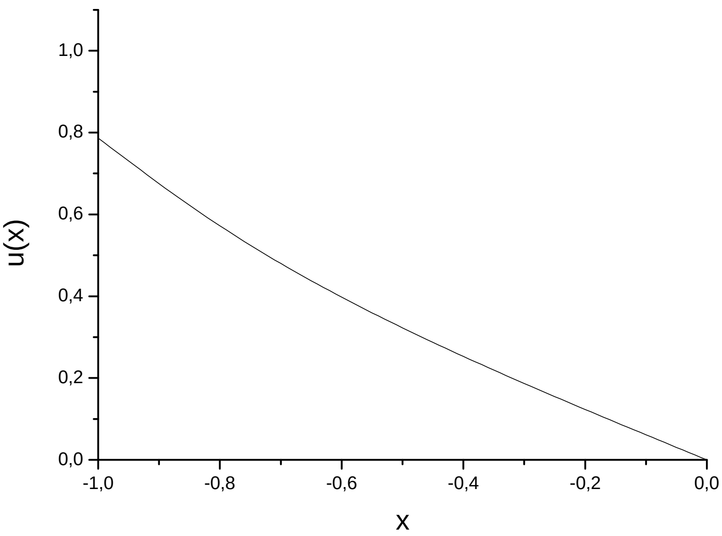

Figure 9: T=0.5, dt=0.01

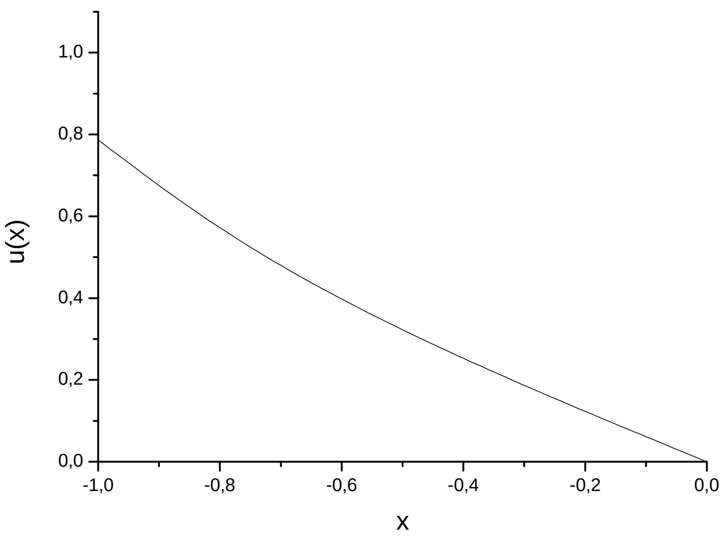

Figure 10: T=0.5, dt=0.001