Московский Государственный Университет им. М. В. Ломоносова
Физический факультет

Схема переменных направлений для уравнения теплопроводности в прямоугольной области

Выполнил студент 417 группы
Гамов А. Л.

Москва, 2015

Схема переменных направлений для уравнения теплопроводности в прямоугольной области

Необходимо решить следующую задачу:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \Delta U + xt^2 \sin y \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y < \frac{\pi}{2} \quad , \quad 0 < t < T \tag{1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=1} = 0 \tag{2}$$

$$U\Big|_{y=0} = \frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=\frac{\pi}{2}} = 0 \tag{3}$$

$$U\Big|_{t=0} = 0 \tag{4}$$

Первым шагом ее численного решения является введение равномерное сетки в прямоугольной области
$G = \{(x, y); \quad 0 < x < 1 \quad , \quad 0 < y < \frac{\pi}{2}\};$
$x_n = nh_x, \qquad n = 0, 1, 2...N;$
$y_m = mh_y, \qquad m = 0, 1, 2...M;$
Будем рассматривать сеточные функции $U^j_{m,n}$ Воспользуемся методом переменных направлений, чтобы решить численно задачу.

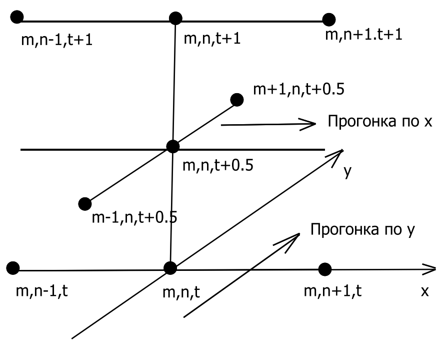

Figure 1: Схема переменных направлений

Переход с одного слоя по времени на другой делается через промежуточный слой. Запишем разностную апроксимацию при переходе с j слоя на промежуточный j+0.5.

$$\frac{U^{j+0.5}_{m,n} - U^j_{m,n}}{\frac{dt}{2}} = \frac{U^j_{m,n-1} - 2U^j_{m,n} + U^j_{m,n+1}}{h_x^2} + \frac{U^{j+0.5}_{m-1,n} - 2U^{j+0.5}_{m,n} + U^{j+0.5}_{m+1,n}}{h_y^2} + f^{j+0.5}_{m,n}; \tag{5}$$

А так же с промежуточного слоя на j+1.

$$\frac{U_{m,n}^{j+1} - U_{m,n}^{j+0.5}}{\frac{dt}{2}} = \frac{U_{m,n-1}^{j+1} - 2U_{m,n}^{j+1} + U_{m,n+1}^{j+1}}{h_x^2} + \frac{U_{m-1,n}^{j+0.5} - 2U_{m,n}^{j+0.5} + U_{m+1,n}^{j+0.5}}{h_y^2} + f_{m,n}^{j+0.5}; \tag{6}$$

Где функция $f_{m,n}^{j} = xt^2 \sin y = h_x n (dtj)^2 \sin (h_y m)$;
Переход с j слоя на промежуточный (j+0.5) проводиться с помощью прогонки по y. Для этого разностную апроксимацию необходимо представить в виде:

$$A_m U_{m-1}^{j+0.5} - C_m U_m^{j+0.5} + B_m U_{m+1}^{j+0.5} + F_m = 0; \tag{7}$$

Индекс n опущен, потому что он везде имеет одно значение. Домножив уравнение (5) на dt/2 и приведя подобные члены получим:

$$A_m = \frac{dt}{2h_y^2};$$

$$C_m = 1 + \frac{dt}{h_y^2};$$

$$B_m = \frac{dt}{2h_y^2};$$

$$F_m = \frac{dt}{2h_x^2}(U_{m,n-1}^{j} + U_{m,n+1}^{j}) + \frac{dt f_{m,n}^{j+0.5}}{2} + (1 - \frac{dt}{2h_x^2})U_{m,n}^{j}; \tag{8}$$

Принимая связь между значениями соседних сеточных функций в виде:

$$U_m = \alpha_{m+1} U_{m+1} + \beta_{m+1}; \tag{9}$$

А также используя уравнение (7) получим связь между соседними α и β

$$\alpha_{m+1} = \frac{B_m}{C_m - A_m \alpha_m}; \quad \beta_{m+1} = \frac{A_m \beta m + F_m}{C_m - A_m \alpha_m} \tag{10}$$

Из граничных условий находим α_1 и β_1.

$$U\Big|_{y=0} = 0; \tag{11}$$

Очевидно, что $\alpha_1 = 0$ и $\beta_1 = 0$. Далее находим подряд все остальные α_m и β_m.
После этого зная граничное условие на другом конце и разностную апроксимацию производной второго порядка точности (12) находим(13):

$$\frac{\partial U}{\partial y}\Big|_{y=\frac{\pi}{2}} = \frac{4U_{M-1} - 3U_M - U_{M-2}}{-2h_y} = 0; \tag{12}$$

$$U_M = \frac{\alpha_{M-1}\beta_M + \beta_{M-1} - 4\beta_M}{4\alpha_M - 3 - \alpha_{M-1}\alpha_M}; \tag{13}$$

Далее используя (9) вычисляем остальные U_m При этом узловые функции с $n = 0$ и $n = N$ могут быть определены из граничных условий (14).

$$\begin{gathered}
\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{4U_1 - 3U_0 - U_2}{2h_x} = 0; \\
\frac{\partial U}{\partial x}\Big|_{x=1} = \frac{4U_{N-1} - 3U_N - U_{N-2}}{-2h_x} = 0;
\end{gathered} \tag{14}$$

И вычислены по формулам (15).

$$\begin{gathered}
U_0 = \frac{4U_1 - U_2}{3}; \\
U_N = \frac{4U_{N-1} - U_{N-2}}{3};
\end{gathered} \tag{15}$$

Переход с промежуточного слоя на j+1 происходит аналогично, кроме формулы F и одного граничного условия.

$$F_n = \frac{dt}{2h_y^2}(U_{m-1,n}^{j+0.5} + U_{m+1,n}^{j+0.5}) + \frac{dt f_{m,n}^{j+0.5}}{2} + (1 - \frac{dt}{2h_y^2})U_{m,n}^{j+0.5}; \tag{16}$$

$$\begin{gathered}
\alpha_1 = 2 - (1 + \frac{h_y^2}{dt}); \\
\beta_1 = \frac{F_n h_y^2}{dt};
\end{gathered} \tag{17}$$

Данная неявная схема имеет точность $O(\tau^2 + |h|^2)$ и безусловно устойчива.

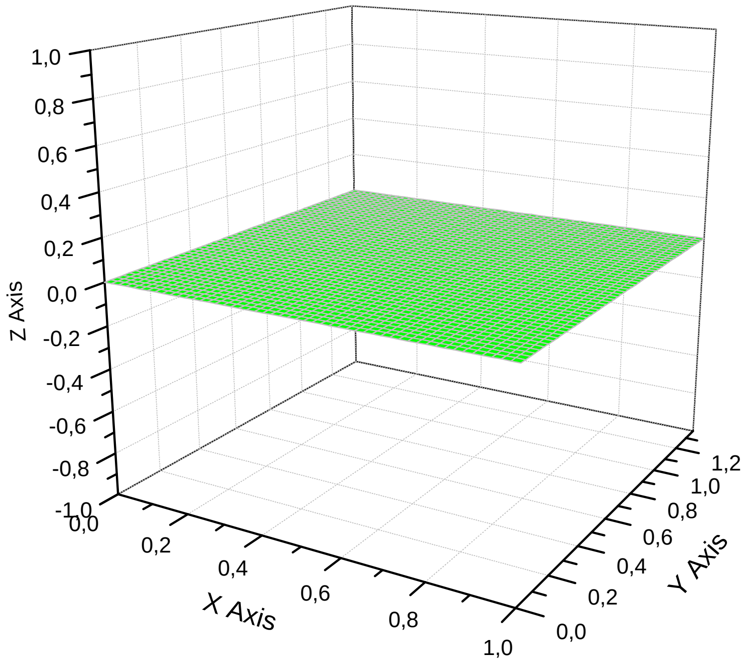

Figure 2: T=0, dt=0.01

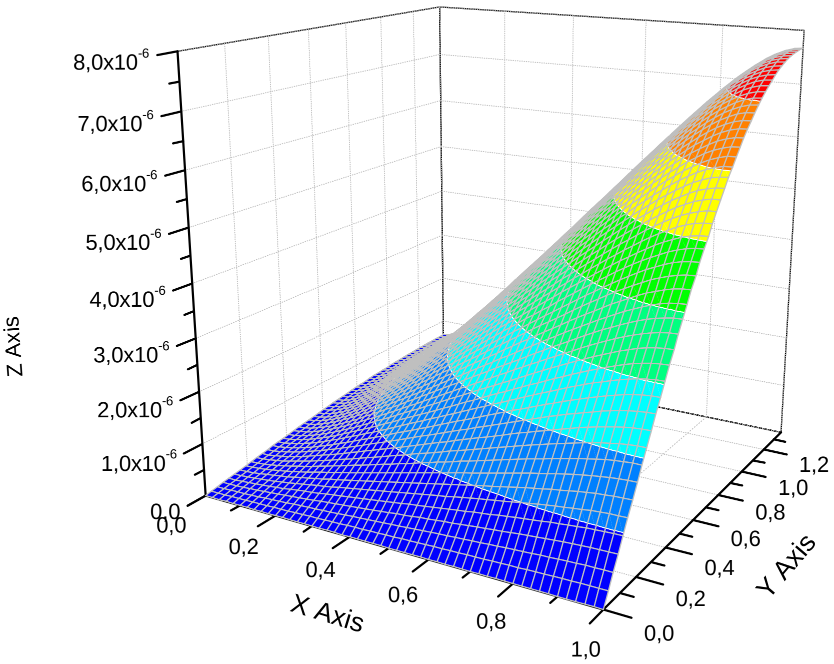

Figure 3: T=0.2, dt=0.01

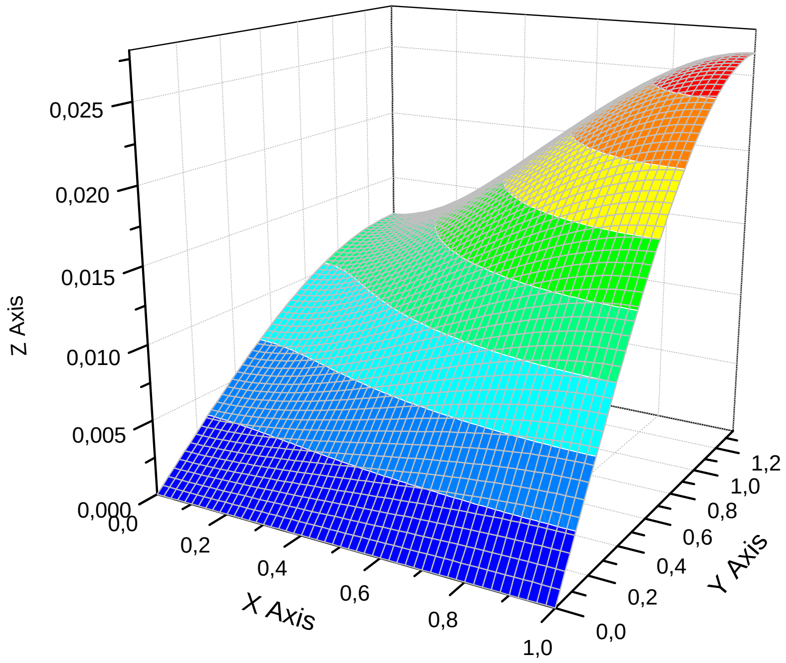

Figure 4: T=0.5, dt=0.01

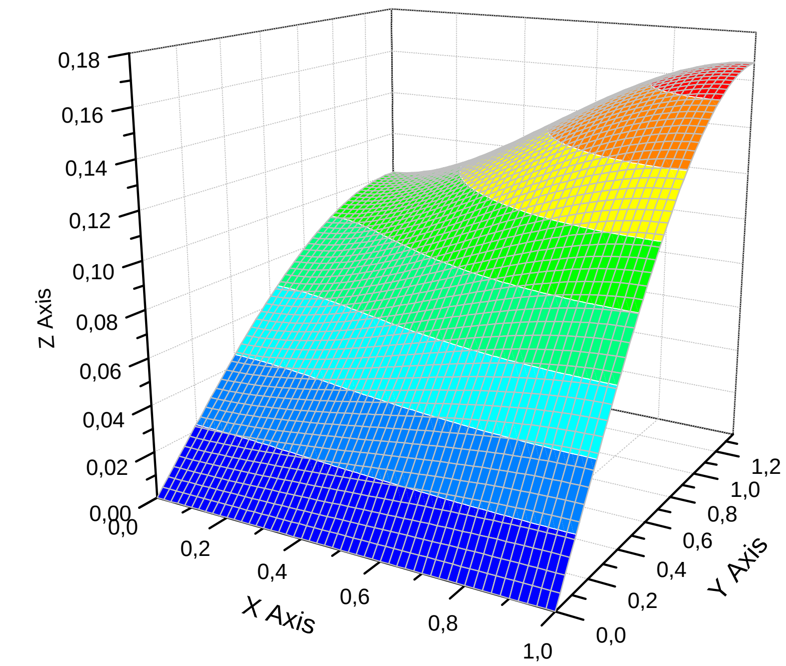

Figure 5: T=1, dt=0.01

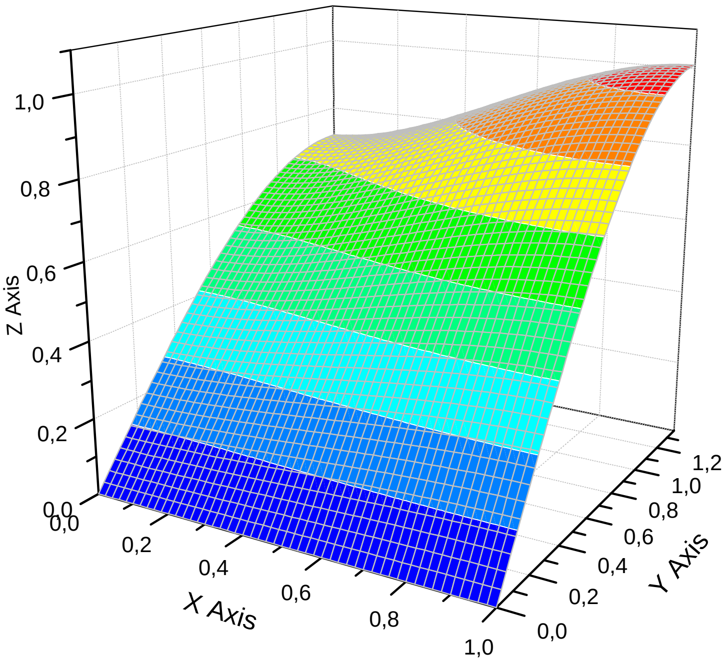

Figure 6: T=2, dt=0.01

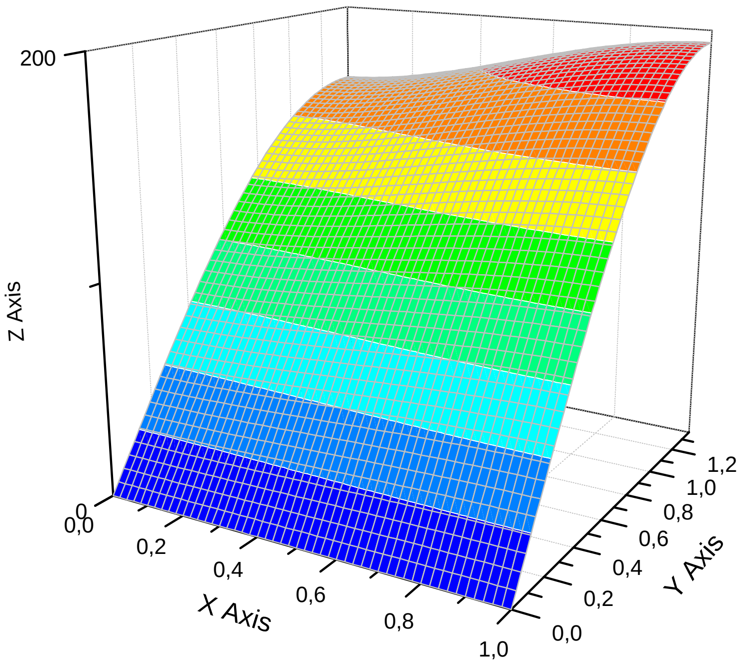

Figure 7: T=20, dt=0.01

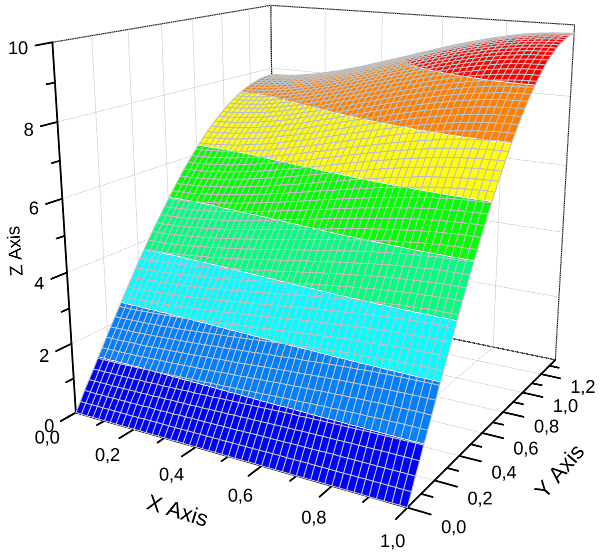

Figure 8: T=5, dt=0.1

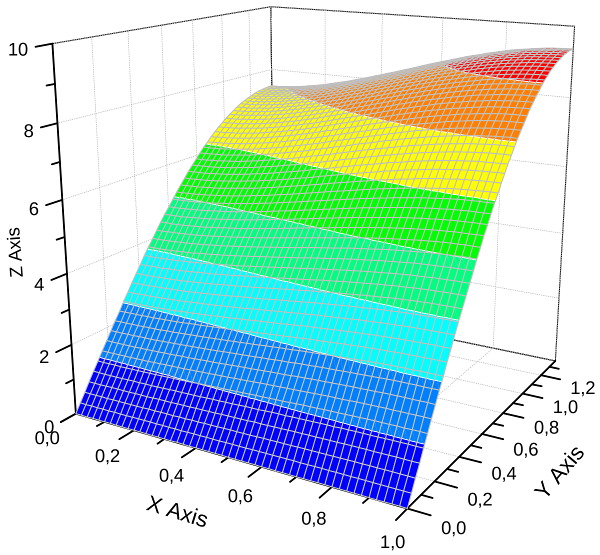

Figure 9: T=5, dt=0.01

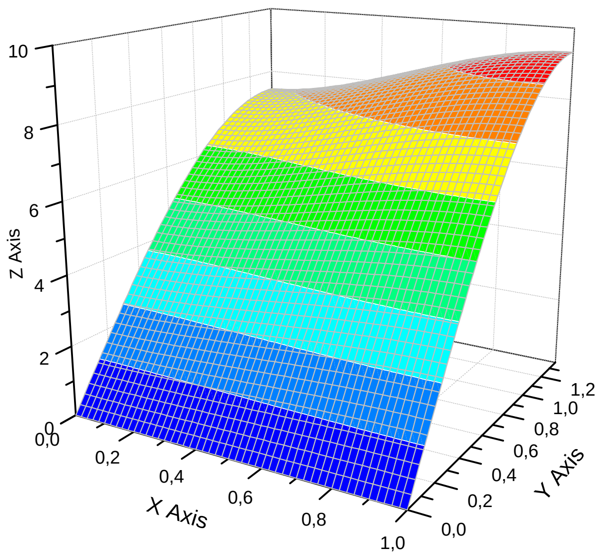

Figure 10: T=5, dt=0.001